



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

CIRCUNFERENCIA

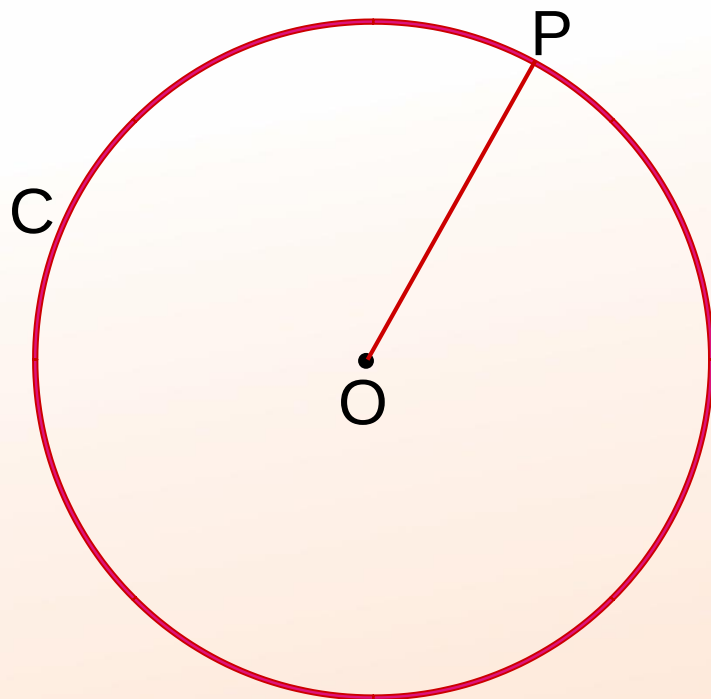
**CICLO
PRE
2024-1**



Circunferencia

Definición

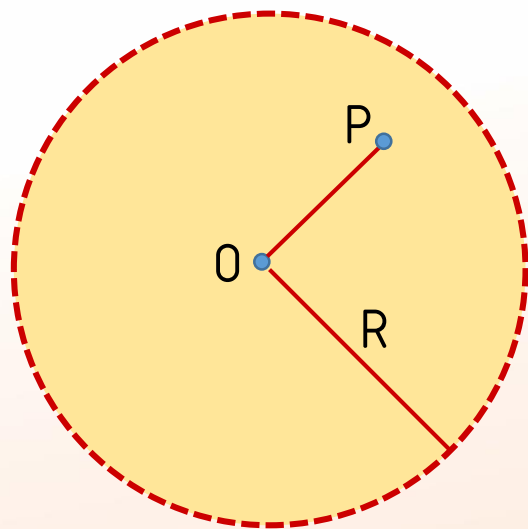
Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo de dicho plano, llamado **centro** de la circunferencia.



C es una circunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$.

Interior de una circunferencia

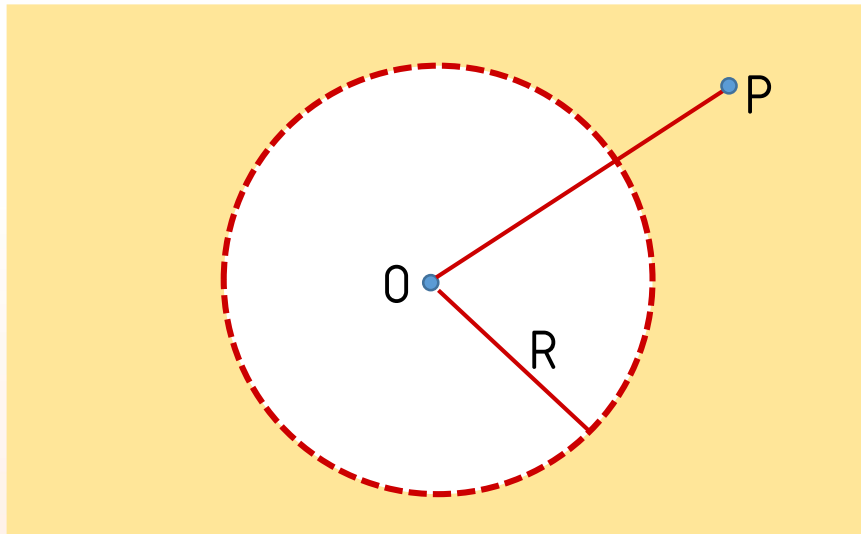
El **interior** de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano, que contiene a la circunferencia, cuya distancia al centro es menor que la longitud del radio.



Si $PO < R$ entonces P pertenece al interior de la circunferencia.

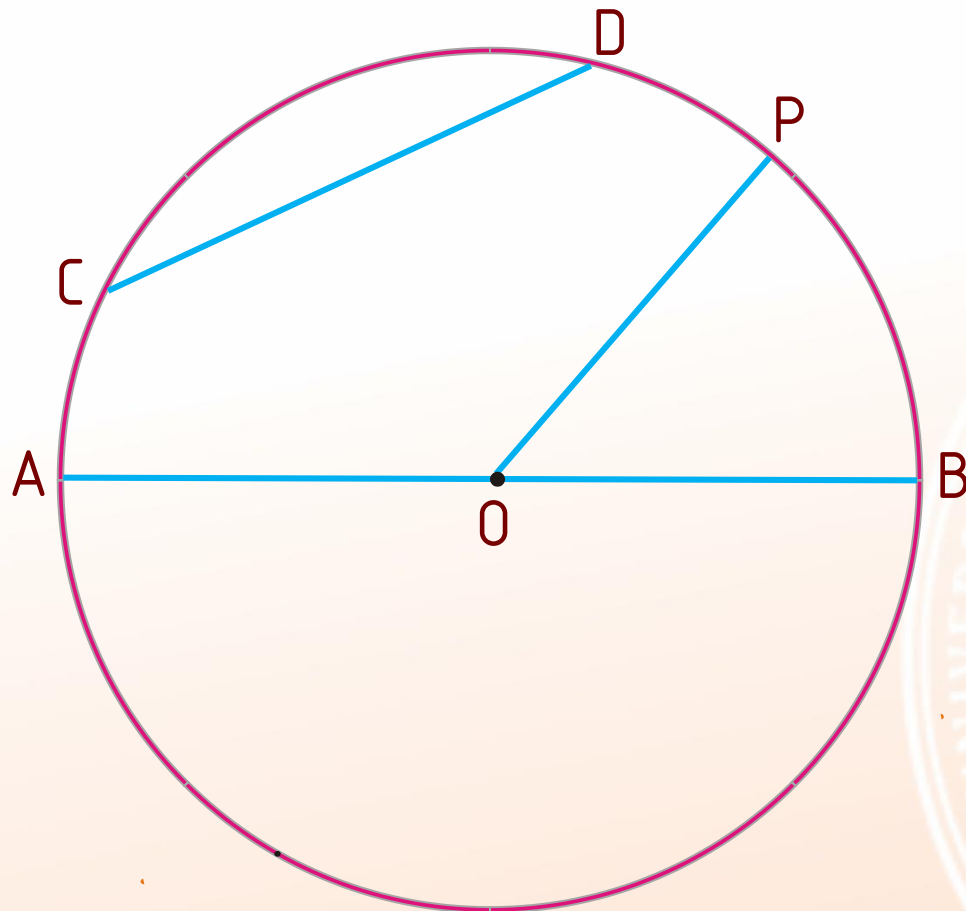
Exterior de una circunferencia

El **exterior** de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano, que contiene a la circunferencia, cuya distancia al centro es mayor que la longitud del radio.



Si $PO > R$ entonces P pertenece al exterior de la circunferencia.

Definiciones



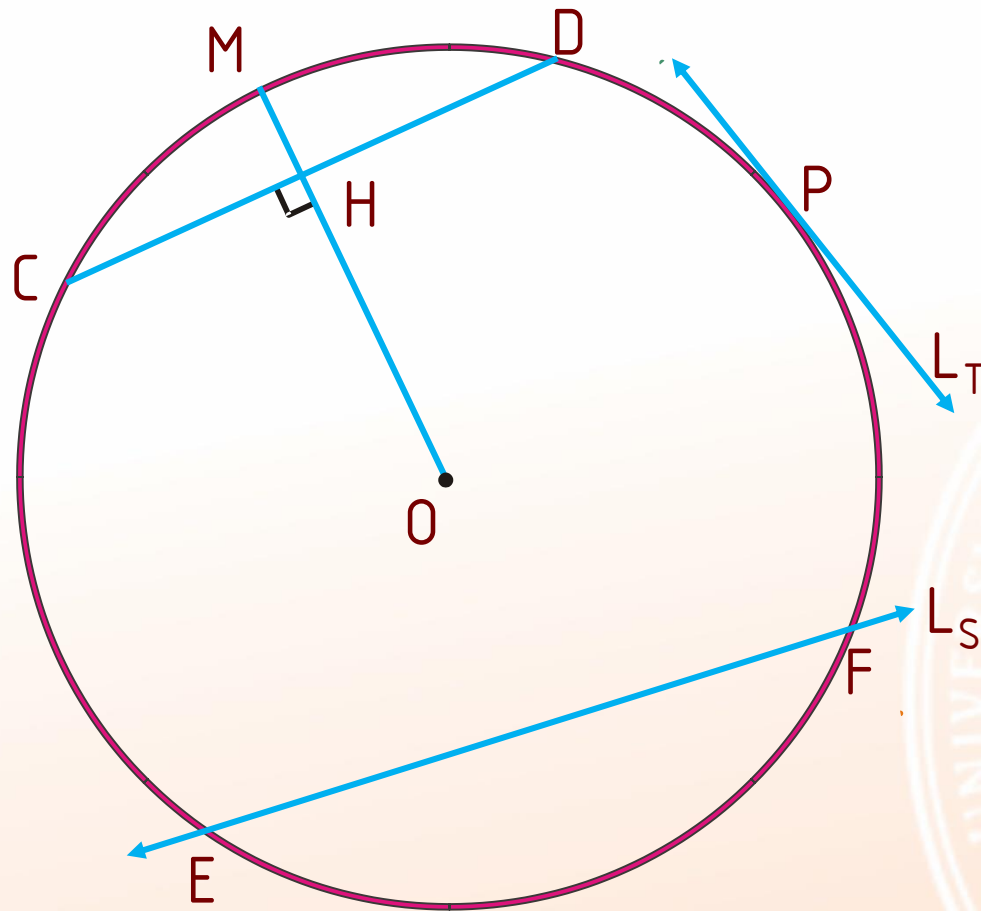
Radio.– Es el segmento cuyos extremos son el centro y un punto de la circunferencia, por ejemplo, $\overline{OP}$.

Cuerda.– Es el segmento cuyos extremos pertenecen a la circunferencia, por ejemplo, $\overline{CD}$.

Diámetro.– Es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia, por ejemplo, $\overline{AB}$.

Arco.– Es una parte de la circunferencia, por ejemplo, arco CD.

Definiciones

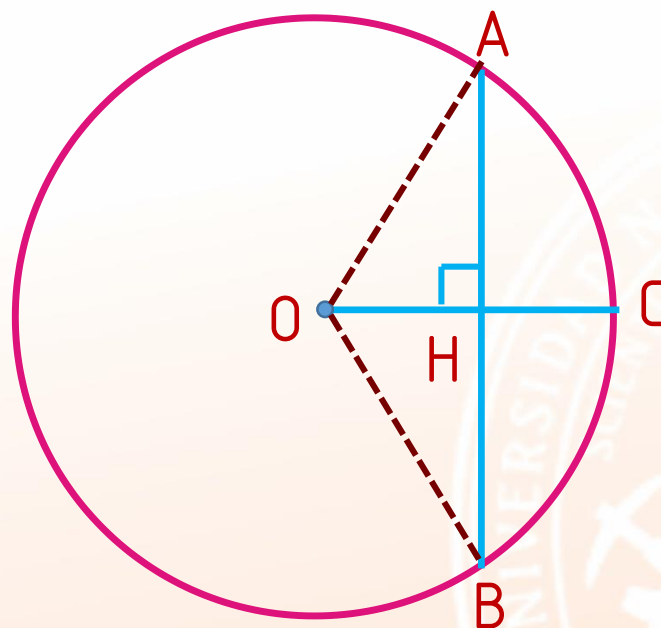


Recta secante.– Es la recta que interseca a la circunferencia en dos puntos, por ejemplo, L_S .

Recta tangente.– Es la recta que interseca a la circunferencia en un solo punto, denominado punto de tangencia, y es coplanar con la circunferencia, por ejemplo, L_T .

Flecha o sagita.– Es una parte del radio perpendicular a una cuerda, comprendida entre la cuerda y la circunferencia, por ejemplo, $\overline{MH}$.

Teorema.– En una circunferencia, un diámetro perpendicular a una cuerda, biseca a ésta cuerda.



$$\text{Si } \overline{OC} \perp \overline{AB} \Rightarrow AH = BH$$

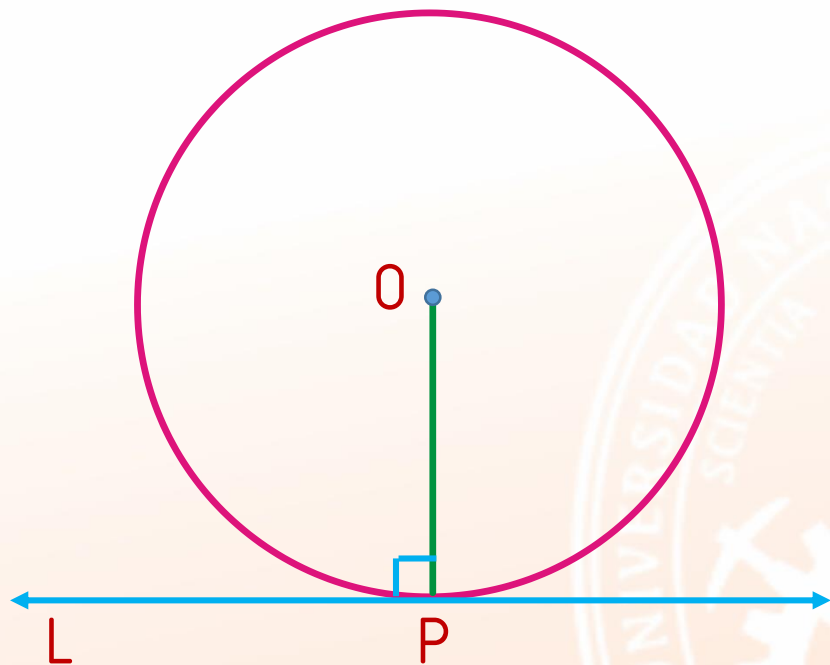
Demostración

$\triangle AOB$ es isósceles

$\overline{OH}$ es mediana

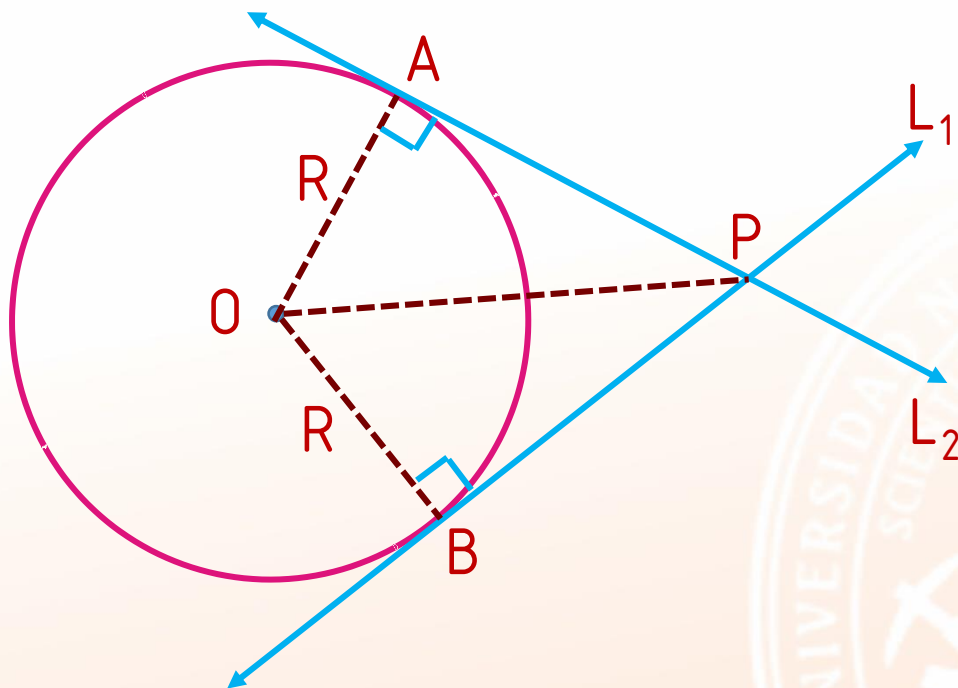
Luego: $AH = BH$

Teorema.– En una circunferencia, una recta tangente es perpendicular al radio trazado por el punto de tangencia.



Si L es una recta tangente y P es el punto de tangencia, entonces $\overline{OP} \perp L$.

Teorema.– Si una circunferencia es tangente a dos rectas secantes, entonces los segmentos determinados son congruentes.

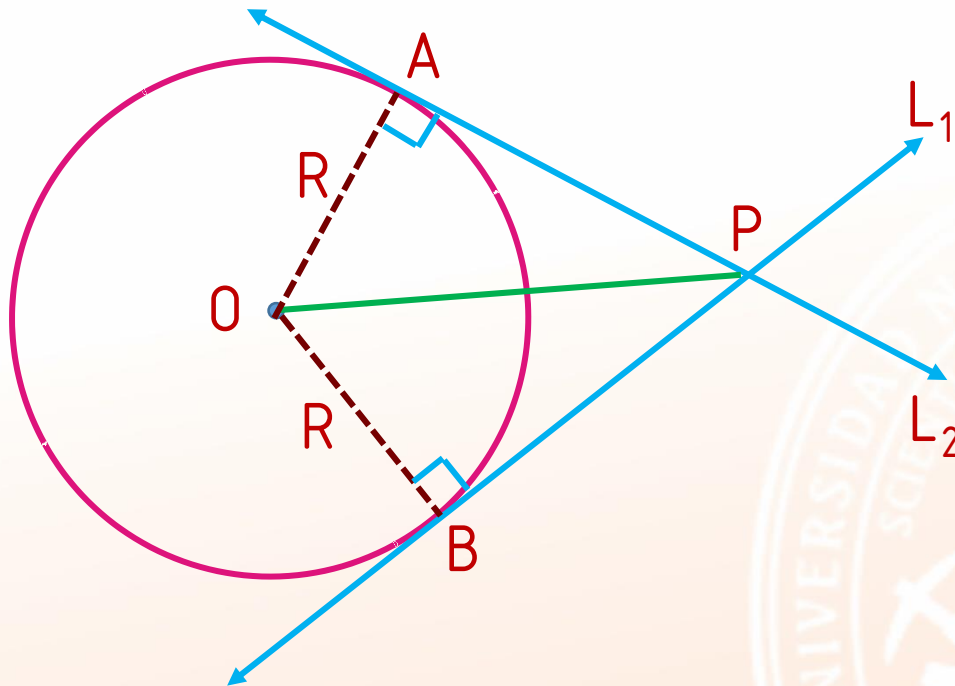


Si A y B son puntos de tangencia, entonces $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Demostración

$\triangle PAO \cong \triangle PBO$ (LLA)
Luego: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

Teorema.- Si una circunferencia es tangente a dos rectas secantes, entonces la bisectriz de uno de los ángulos determinados por las rectas, contiene al centro .



Si A y B son puntos de tangencia y O es el centro, entonces $\overrightarrow{PO}$ es la bisectriz del ángulo APB.

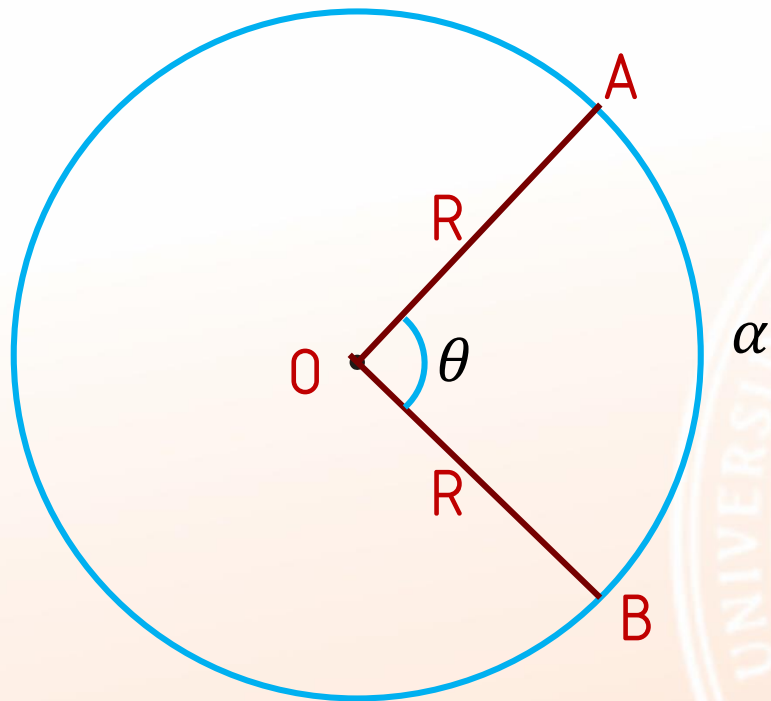
Demostración

$$\triangle PAO \cong \triangle PBO \text{ (LLA)}$$

$$\text{Luego: } \angle APO \cong \angle BPO$$

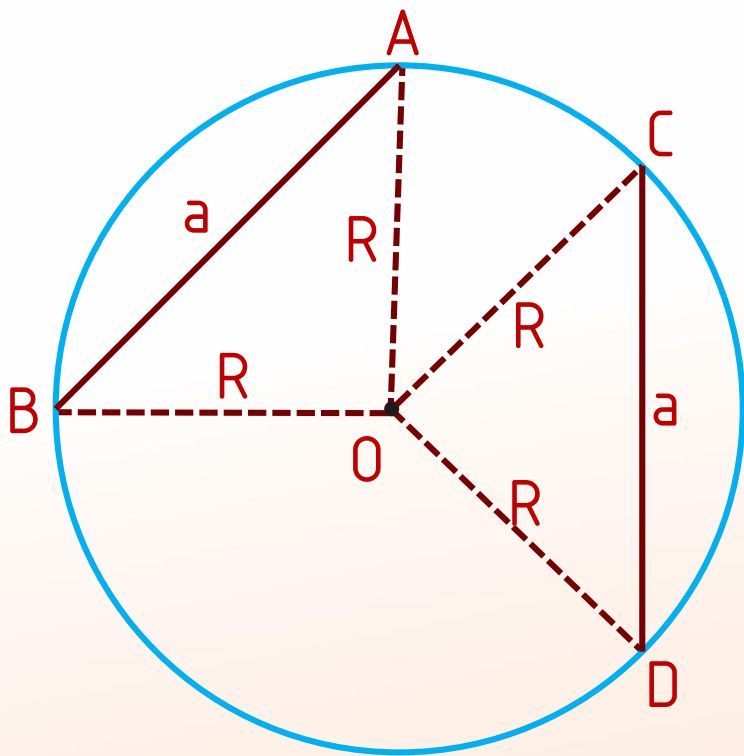
$\overrightarrow{PO}$ es la bisectriz del ángulo APB.

Definición.- La medida de un arco es igual a la medida del ángulo determinado por los radios trazados por los extremos del arco.



Si α y θ son las medidas del arco AB y el ángulo AOB , entonces $\alpha = \theta$.

Teorema.- Si en una circunferencia se trazan dos cuerdas congruentes, entonces los arcos que subtienden estas cuerdas son congruentes.



Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

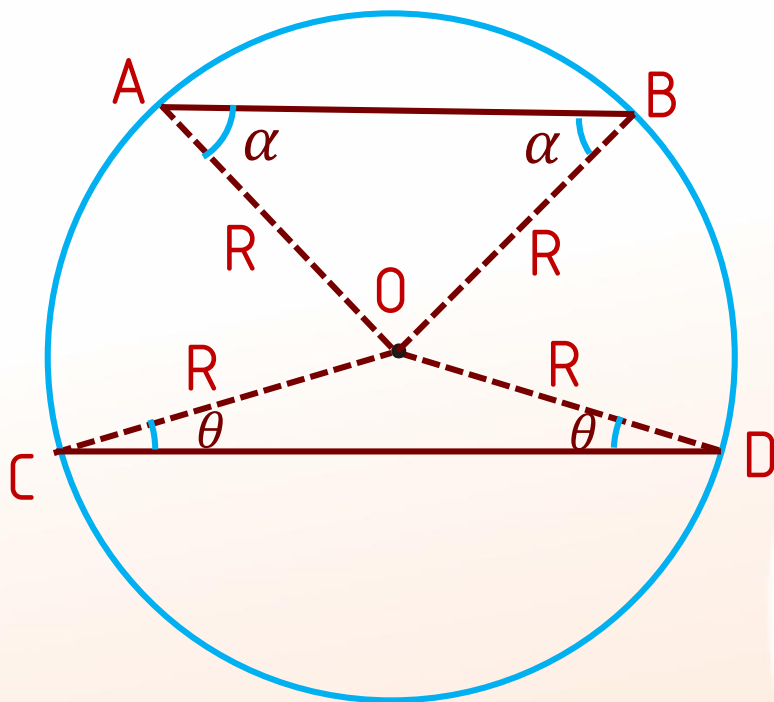
Demostración

$$\triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (LLL)}$$

$$\angle AOB \cong \angle COD$$

$$\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

Teorema.- Si en una circunferencia se trazan dos cuerdas paralelas, entonces los arcos comprendidos entre estas cuerdas son congruentes.



Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$

Demostración

$\triangle AOB$ y $\triangle COD$ son isósceles

$$m\angle AOC = \alpha + \theta$$

$$m\angle BOD = \alpha + \theta$$

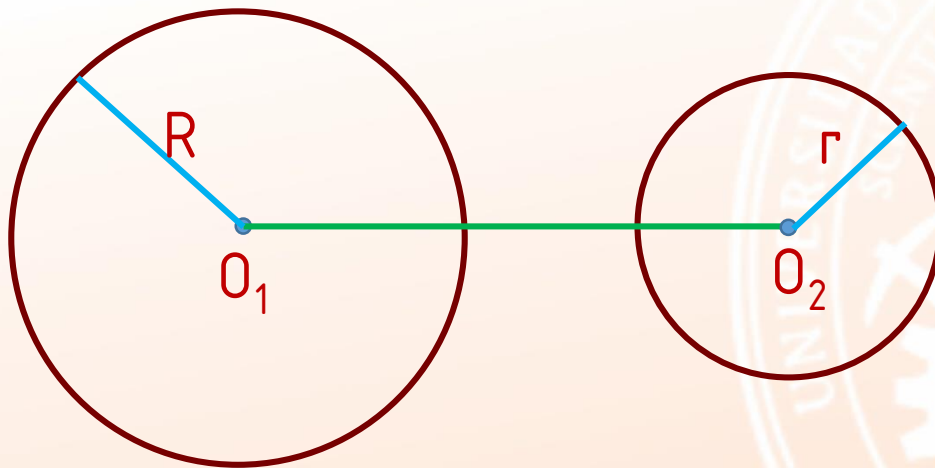
Luego:

$$\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$$

Posiciones relativas entre dos circunferencias coplanares

Circunferencias exteriores

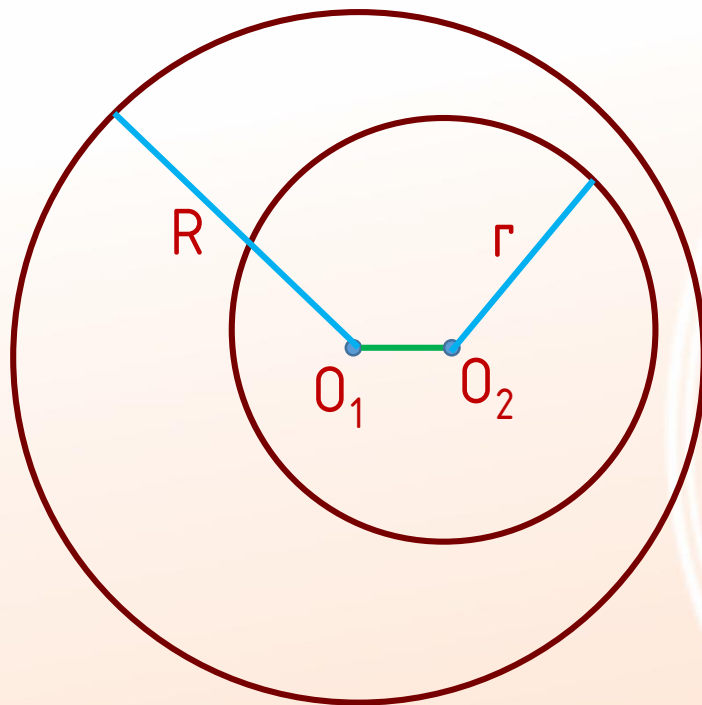
Dos circunferencias son exteriores si no tienen puntos comunes y sus interiores son disjuntos.



Si las circunferencias son exteriores, entonces $O_1O_2 > R + r$

Circunferencias interiores

Dos circunferencias son interiores, si no tienen puntos comunes y el interior de una de ellas contiene al interior de la otra.

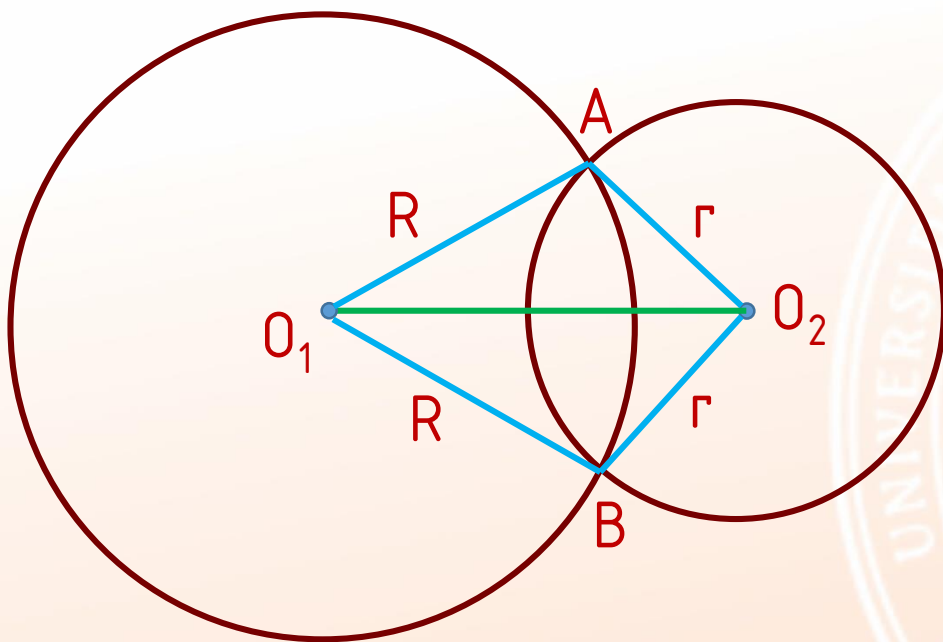


Si las circunferencias son interiores, entonces

$$O_1O_2 < R - r$$

Circunferencias secantes

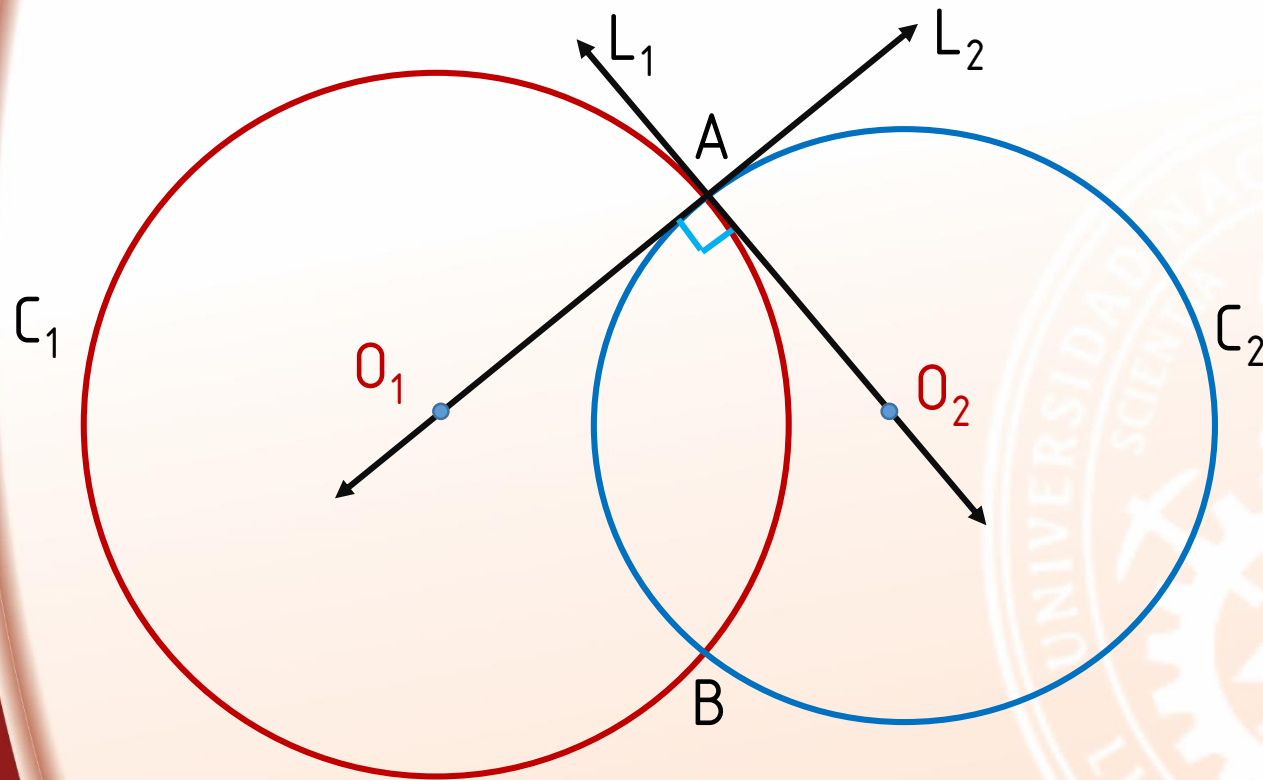
Dos circunferencias son secantes, si tienen dos puntos comunes.



Si las circunferencias son secantes, entonces $R - r < O_1O_2 < R + r$

Circunferencias ortogonales

Dos circunferencias son ortogonales, si son secantes y las rectas tangentes trazadas por uno de los puntos de intersección son perpendiculares.

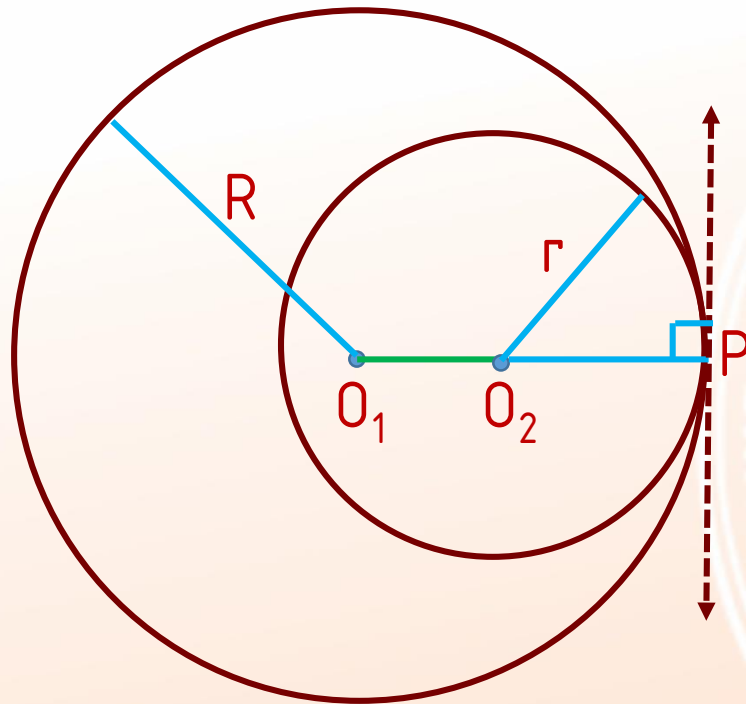


Si las rectas tangentes L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces las circunferencias C_1 y C_2 son ortogonales.

Las rectas L_1 y L_2 contienen a los centros O_1 y O_2 .

Circunferencias tangentes interiores

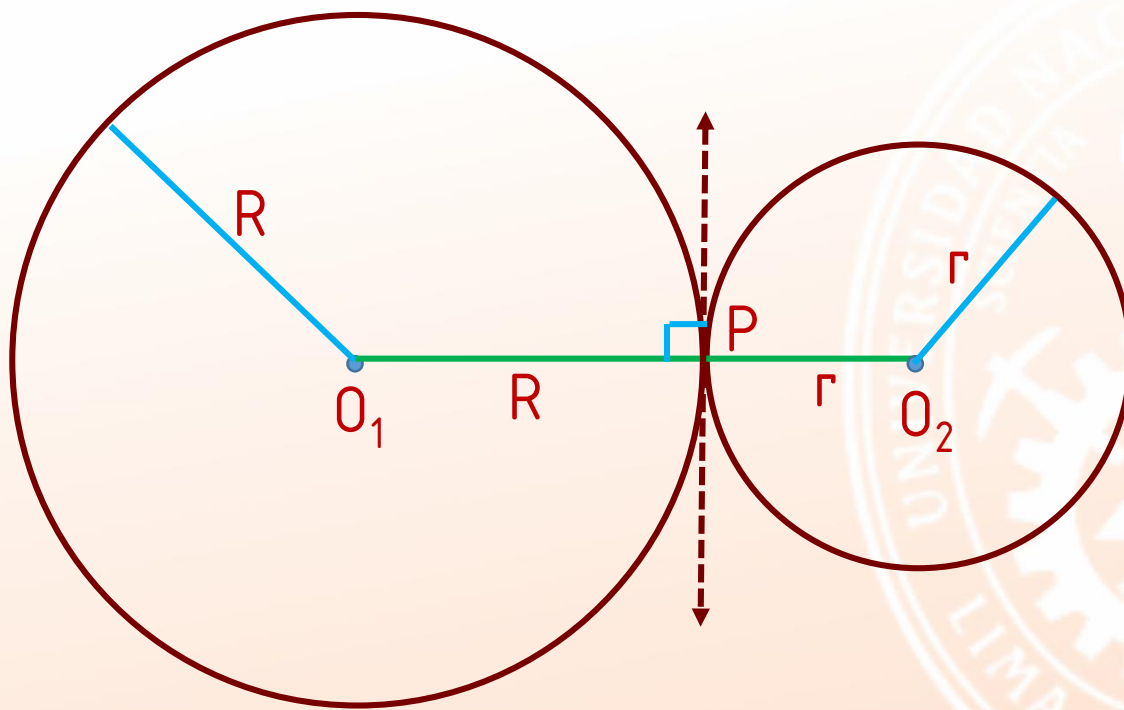
Dos circunferencias son tangentes interiores, si tienen un punto común y el interior de una de las circunferencias contiene al interior de la otra.



Si las circunferencias son tangentes interiores, entonces $O_1O_2 = R - r$

Circunferencias tangentes exteriores

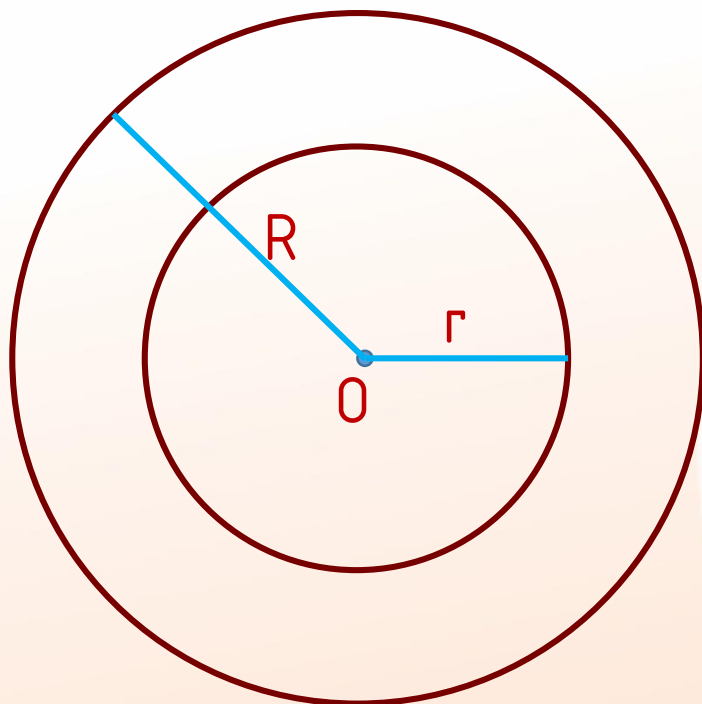
Dos circunferencias son tangentes exteriores, si tienen un punto común y sus interiores son disjuntos.



Si las circunferencias son tangentes exteriores, entonces $O_1O_2 = R + r$

Circunferencias concéntricas

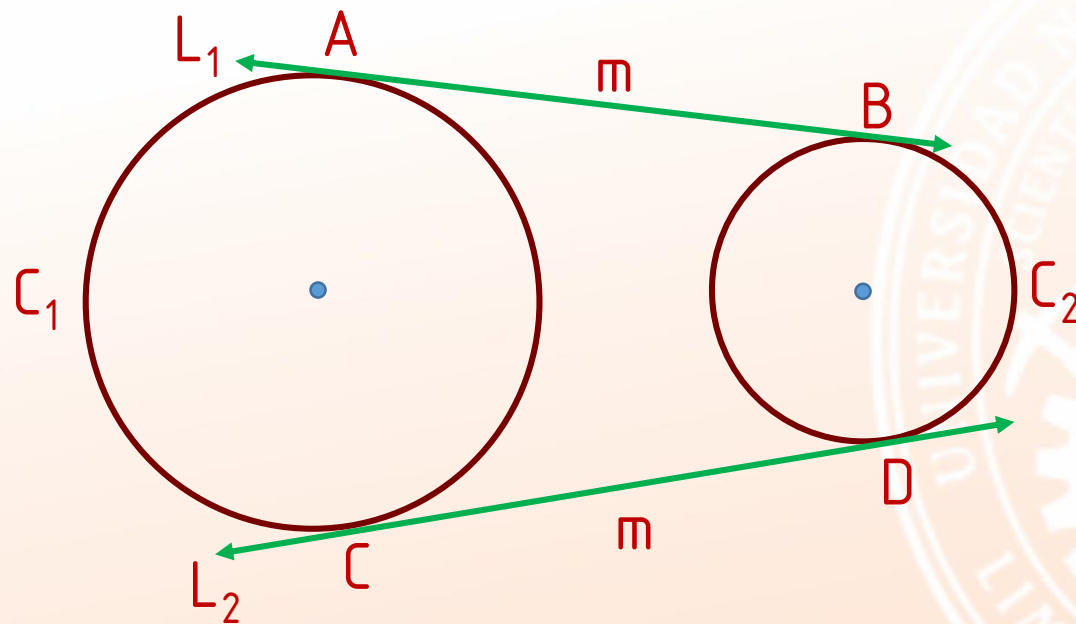
Dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro.



O es el centro de las circunferencias.

Rectas tangentes comunes exteriores a dos circunferencias

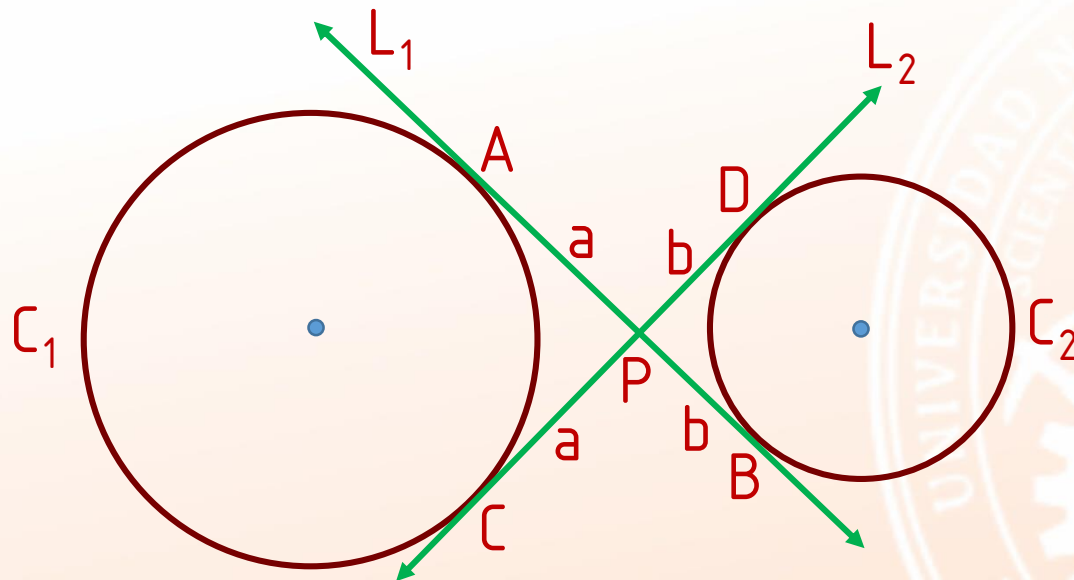
Dos rectas son tangentes comunes exteriores a dos circunferencias si son tangentes a las circunferencias y los segmentos determinados en estas rectas, no tienen punto común.



Las rectas L_1 y L_2 son tangentes comunes exteriores a las circunferencias C_1 y C_2 .

Rectas tangentes comunes interiores a dos circunferencias

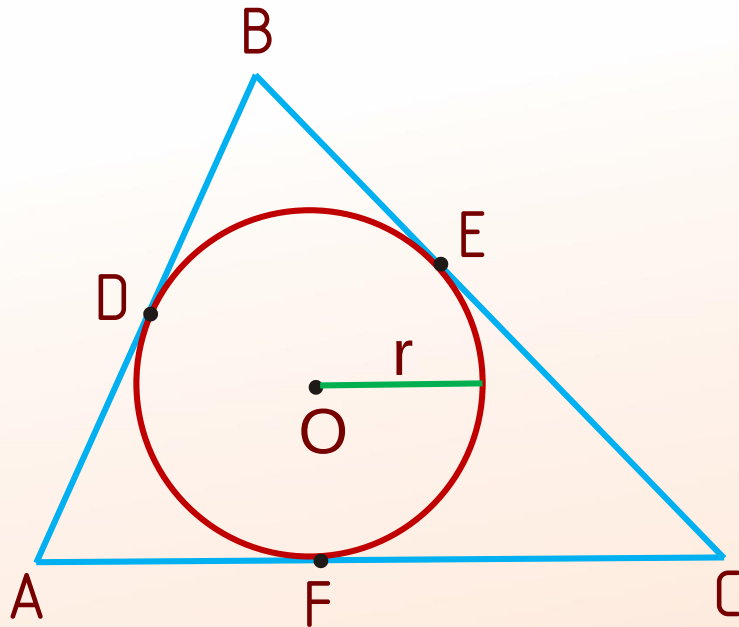
Dos rectas son tangentes comunes interiores a dos circunferencias si son tangentes a las circunferencias y los segmentos determinados en estas rectas, tienen un punto común.



Las rectas L_1 y L_2 son tangentes comunes interiores a las circunferencias C_1 y C_2 .

Circunferencia inscrita

La circunferencia inscrita en un triángulo, es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.



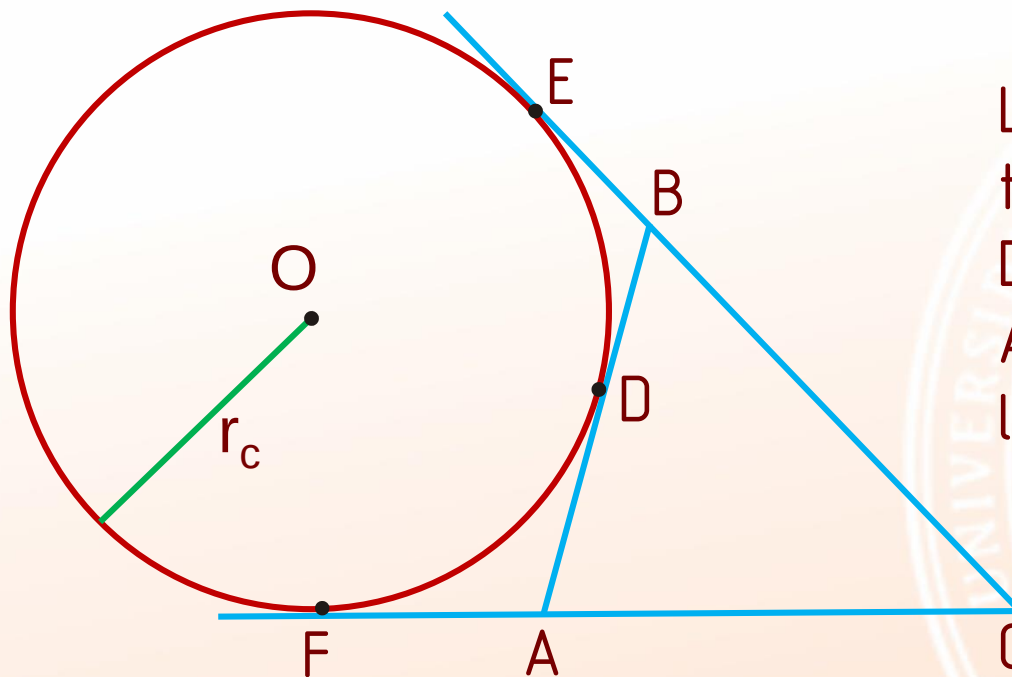
La circunferencia está inscrita en el triángulo ABC.

D, E y F son puntos de tangencia.

Al radio de la circunferencia inscrita, se le denomina **inradio**.

Circunferencia exinscrita

La circunferencia exinscrita a un triángulo, es la circunferencia tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados del triángulo.



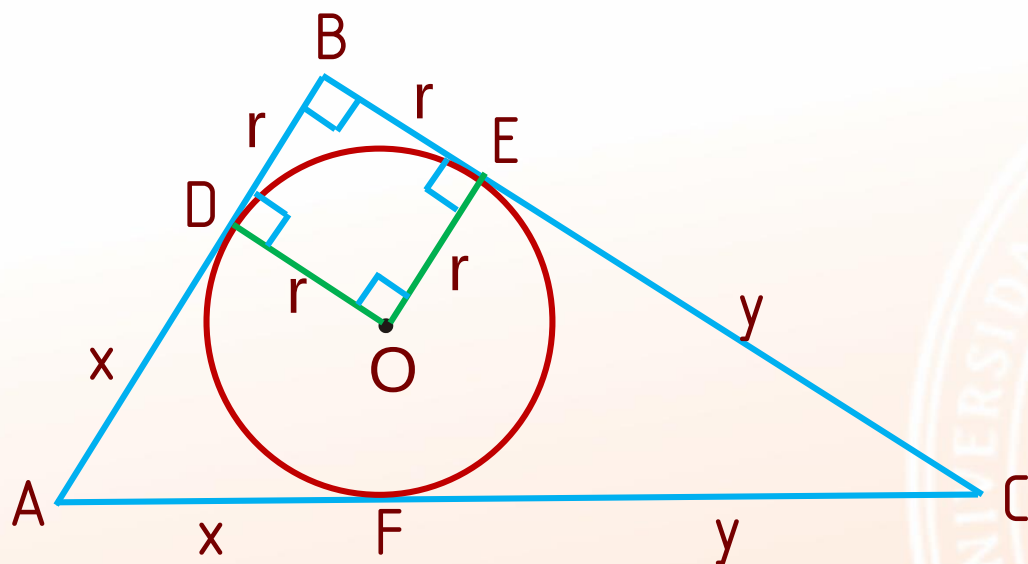
La circunferencia está exinscrita en el triángulo ABC.

D, E y F son puntos de tangencia.

Al radio de la circunferencia exinscrita, se le denomina **exradio**.

Teorema de Poncelet

En un triángulo rectángulo la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de las longitudes de la hipotenusa y del diámetro de la circunferencia inscrita.



Si ABC es un triángulo rectángulo, recto en B , entonces:

$$AB + BC = AC + 2r$$

Demostración

$BDOE$ es un cuadrado: $BD = BE = r$

Teorema: $AD = AF = x$ y $CE = CF = y$

Luego:

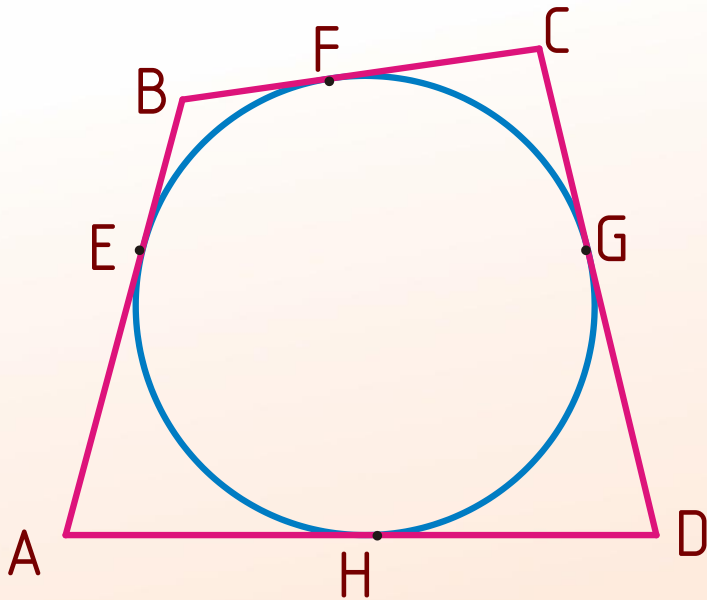
$$AC = x + y$$

$$AC = AB - r + BC - r$$

$$AC + 2r = AB + BC$$

Cuadrilátero circunscrito

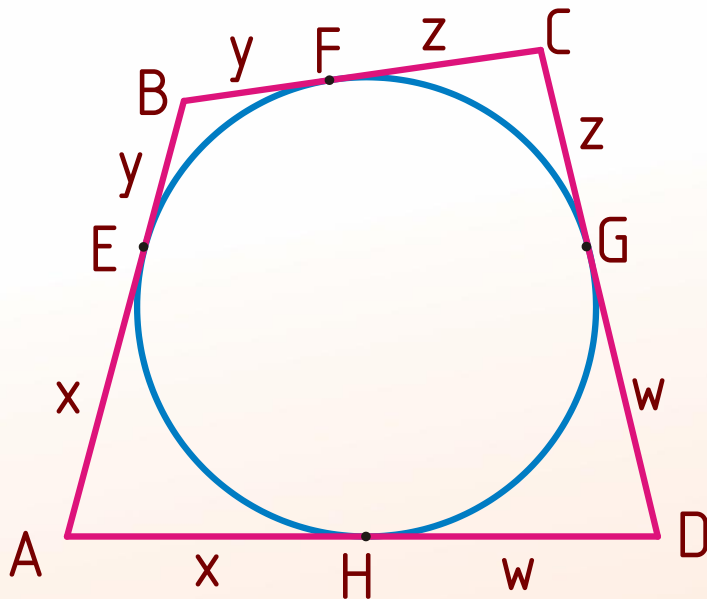
Un cuadrilátero es circunscrito a una circunferencia si los cuatro lados son tangentes a esta circunferencia.



El cuadrilátero ABCD es circunscrito.
E, F, G y H son puntos de tangencia.

Teorema de Pitot

En un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de los lados opuestos son iguales.



Si el cuadrilátero ABCD es circunscrito, entonces:

$$AB + CD = AD + BC$$

Demostración

$$AB = x + y$$

$$BC = z + y$$

$$CD = z + w$$

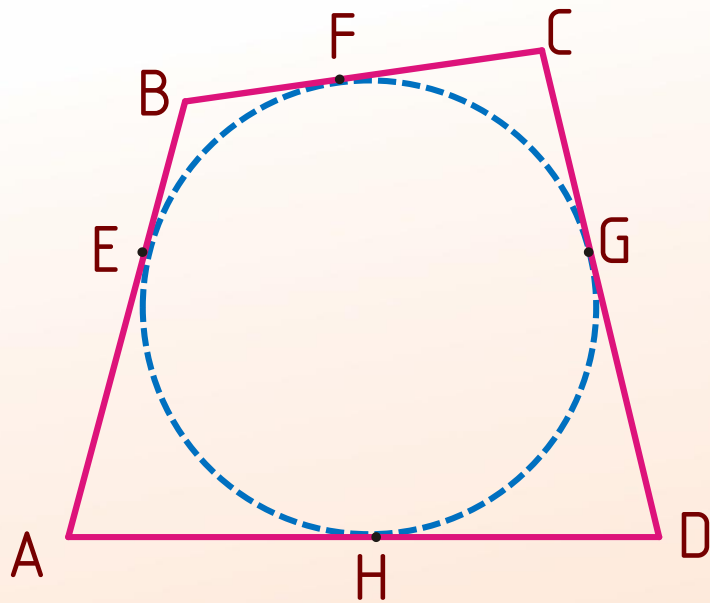
$$AD = x + w$$

Luego: $AB + CD = BC + AD$

Cuadrilátero circunscriptible

Un cuadrilátero convexo es circunscriptible si existe una circunferencia que es tangente a los cuatro lados.

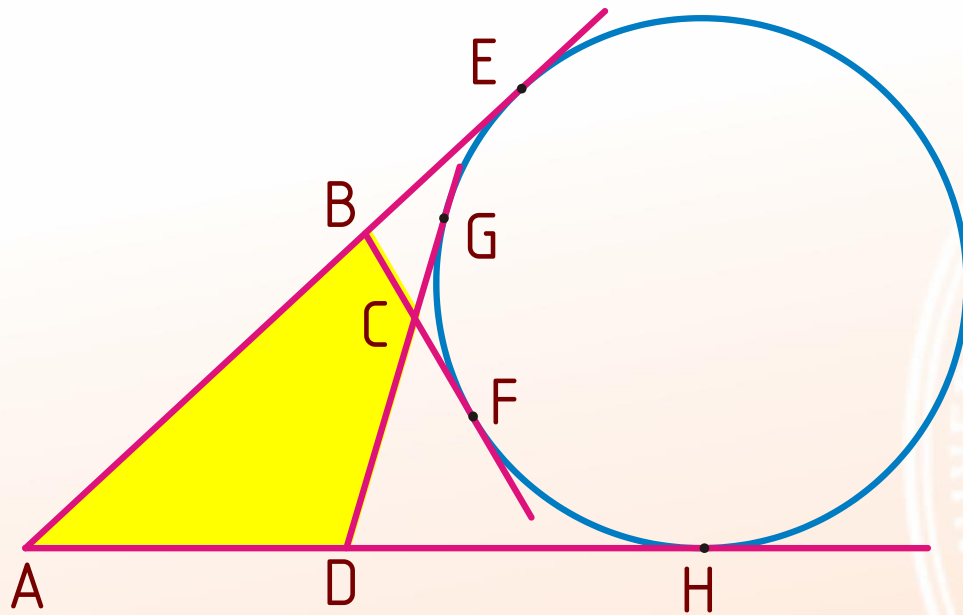
Si en un cuadrilátero convexo se cumple el teorema de Pitot, entonces el cuadrilátero es circunscriptible.



El cuadrilátero ABCD es circunscriptible.

Cuadrilátero exinscrito

Un cuadrilátero es exinscrito a una circunferencia si las prolongaciones de los cuatro lados son tangentes a esta circunferencia.



El cuadrilátero ABCD es exinscrito.
E, F, G y H son puntos de tangencia.

Teorema de Steiner

En todo cuadrilátero exinscrito a una circunferencia, las diferencias de las longitudes de los lados opuestos son iguales.

Si el cuadrilátero ABCD es exinscrito, entonces:

$$AB - CD = AD - BC$$

Demostración

$$AE = AH$$

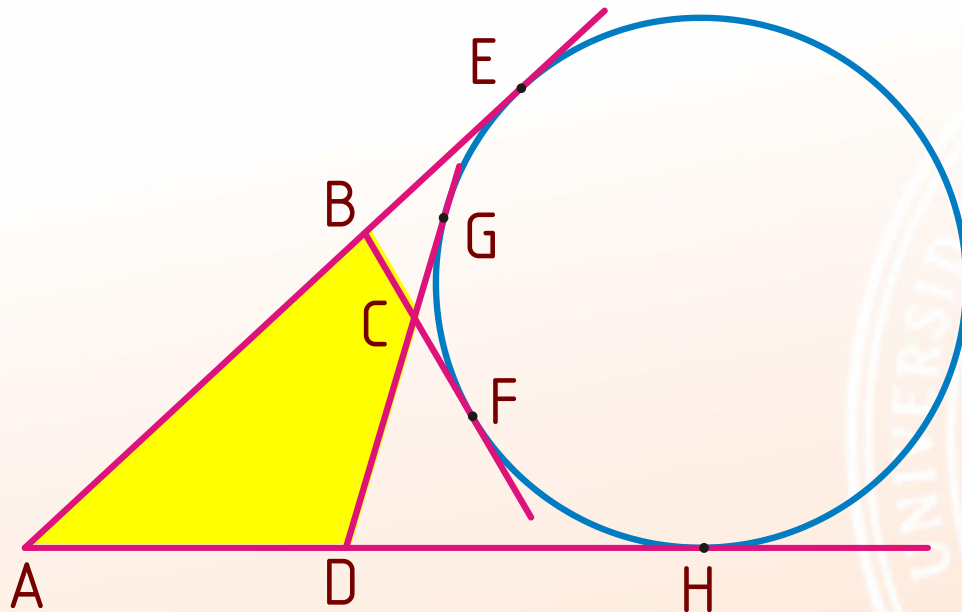
$$AB + BE = AD + DH$$

$$AB + BF = AD + DG$$

$$AB + BC + CF = AD + DC + CG$$

$$AB + BC = AD + DC$$

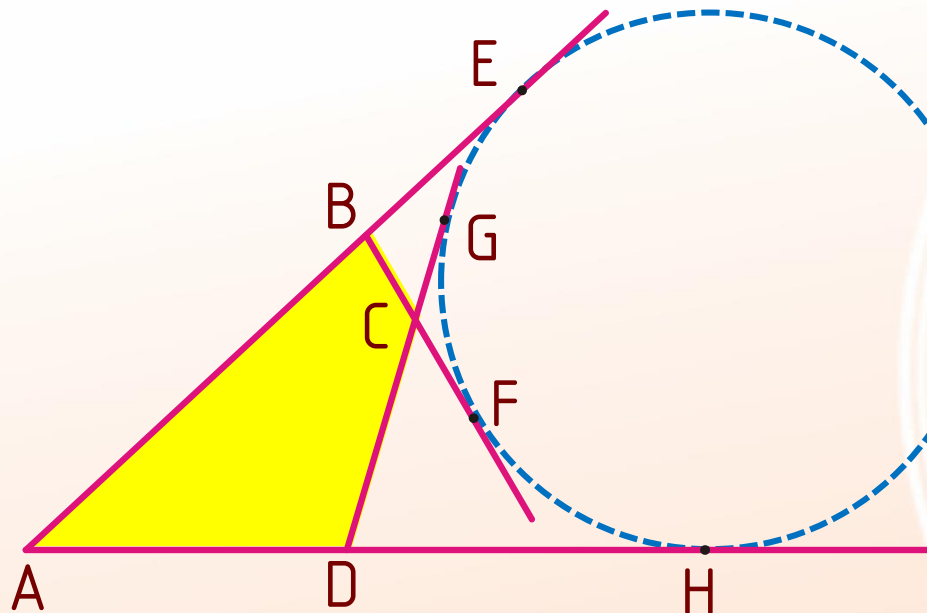
$$AB - DC = AD - BC$$



Cuadrilátero exinscriptible

Un trapezoide es exinscriptible si existe una circunferencia que es tangente a las prolongaciones de los cuatro lados.

Si en un trapezoide se cumple el teorema de Steiner, entonces el trapezoide es exinscriptible.



El trapezoide ABCD es exinscriptible.



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS



ce
pre
UNI